Introdução a Probabilidade e Variáveis Aleatórias

Material desenvolvido no projeto *Elaboração de material didático para o ensino da Estatística na UFES*. Autor principal: Prof. Dr. Alessandro José Queiroz Sarnaglia.
Apoio: Programa de aprimoramento e desenvolvimento do ensino (PRÓ-ENSINO).

Estrutura

Estrutura

Estrutura

Introdução

Se medirmos a corrente em um fio fino de cobre, estaremos conduzindo um **experimento**.

Fato: Se repetirmos o experimento acima diversas vezes, observaremos que os resultados diferem levemente de uma repetição para outra.

Exemplos de variáveis que influenciam no experimento acima:

- variações na temperatura ambiente no momento da realização;
- variações nos equipamentos utilizados para realizar a medição;
- impurezas na composição química do fio, se a medição é realizada em diversas localidades;
- impulsos na fonte da corrente;
- entre uma infinidade de outros fatores.

Não importa quão cuidadosamente tenha sido conduzido o experimento, sempre existem variáveis de peturbação (ou ruído) que não são controladas. Isso provoca aleatoriedade dos resultados obtidos em diferentes realizações do experimento.

Definição

Dizemos que um experimento é aleatório se, mesmo quando repetido sob condições idênticas, não é possível predizer com absoluta certeza o seu resultado. Frequentemente, experimentos aleatórios são denotados pela letra E.

Estrutura

Espaços amostrais

Em geral, não sabemos o resultado de um experimento aleatório.
Por exemplo:

1. $E_1 =$ "uma peça é fabricada em uma linha de produção e, depois de inspecionada, é classificada como 'defeituosa' (D) ou 'não defeituosa' (N)";
2. $E_2 =$ "o número de ligações que chega em determinado dia a um *call center* é observado";
3. $E_3 =$ "o tempo em minutos necessário para realizar uma reação química é observado".

Embora não saibamos o resultado que um experimento fornecerá, devemos poder listar todos os seus possíveis resultados.

Definição

O CONJUNTO de TODOS os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral** *do experimento. Frequentemente, o espaço amostral é denotado pela letra Ω.*

Nos exemplos anteriores os espaços amostrais seriam:

1. $\Omega_{E_1} = \{D, N\}$;
2. $\Omega_{E_2} = \{0, 1, 2 \ldots\}$;
3. $\Omega_{E_3} = \{\omega : \omega > 0\} = (0, \infty)$.

Suponha que os exemplos anteriores sejam repetidos 2 vezes. Os espaços amostrais agora passam a ser:

1. $\Omega_1^* = \Omega_{E_1} \times \Omega_{E_1} = \{DD, DN, ND, NN\}$;
2. $\Omega_2^* = \Omega_{E_2} \times \Omega_{E_2} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \ldots, (1, 0), (1, 1), (1, 2), \ldots\}$;
3. $\Omega_3^* = \Omega_{E_3} \times \Omega_{E_3} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 > 0\}$.

Estrutura

Eventos

Em geral, quando conduzimos um experimento, não estamos interessados apenas em um resultado em particular, mas sim em uma coleção destes. Isto é, em um **subconjunto** do espaço amostral.

Definição

Um **evento** *é qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Frequentemente, eventos são denotados por letras iniciais do alfabeto maiúsculas:* $A, B, C, \ldots$.

Exemplos de eventos dos espaços amostrais Ω_1^*, Ω_2^* e Ω_3^*:

1. $A_1 =$ "Pelo menos uma peça defeituosa" $= \{DD, DN, ND\}$;
2. $A_2 =$ "Receber 4 ligações no total" $= \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$ $= \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_2^* : \omega_1 + \omega_2 = 4\}$;
3. $A_3 =$ "no total as duas reações terminarem em 5 minutos ou mais" $= \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_3^* : \omega_1 + \omega_2 \geq 5\}$

Definição

Sejam A, B *eventos de* Ω*, dizemos que* A *está contido em* B *se todos elementos de* A *pertencem a* B*, ou seja,*

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B.$$

Neste caso, escrevemos $A \subset B$*.*

Comentário

Dois eventos $A, B \subset \Omega$ *são iguais se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$*. Escrevemos* $A = B$*.*

Comentário

O conjunto vazio é denotado por $\emptyset$*.*

Sejam $A, B \subset \Omega$ dois eventos. Podemos criar novos eventos a partir de A e B através de operações de conjuntos. Operações básicas:

- A **interseção** de A e B é denotada por $A \cap B$ e representa a ocorrência **simultânea** dos eventos A **e** B;
- A **união** de A e B é denotada por $A \cup B$ e representa a ocorrência dos eventos A **ou** B, **ou** de ambos;
- O **complementar** de A é denotado por A^c e representa a **não** ocorrência do evento A.

Formalmente, temos que:

- $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B, \text{simultaneamente}\}$;
- $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \text{ ou } \omega \in B, \text{ ou } \omega \in A \cap B\}$;
- $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.

As principais propriedades de operações com eventos são:

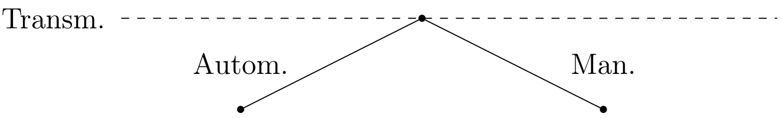
- $(A^c)^c = A$;
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
- $A \cup A^c = \Omega$;
- $A \cap A^c = \emptyset$;
- $(\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$;
- $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$

Um fabricante fornece automóveis que podem ser equipados com os opcionais escolhidos pelo consumidor. Cada veículo pode ser escolhido:

- com ou sem transmissão automática;
- com ou sem ar condicionado;
- com um dos três tipos de sistema estéreo;
- com uma das quatro cores exteriores.

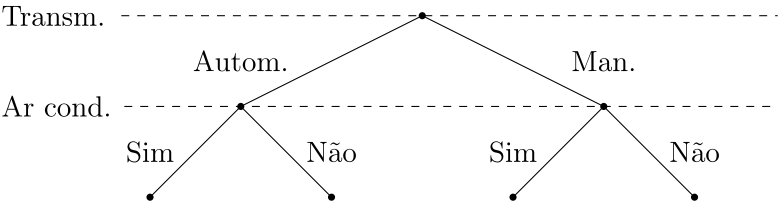
Um fabricante fornece automóveis que podem ser equipados com os opcionais escolhidos pelo consumidor. Cada veículo pode ser escolhido:

- com ou sem transmissão automática;
- com ou sem ar condicionado;
- com um dos três tipos de sistema estéreo;
- com uma das quatro cores exteriores.



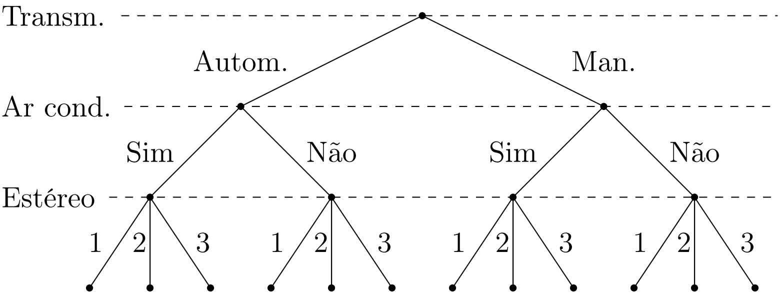
Um fabricante fornece automóveis que podem ser equipados com os opcionais escolhidos pelo consumidor. Cada veículo pode ser escolhido:

- com ou sem transmissão automática;
- com ou sem ar condicionado;
- com um dos três tipos de sistema estéreo;
- com uma das quatro cores exteriores.



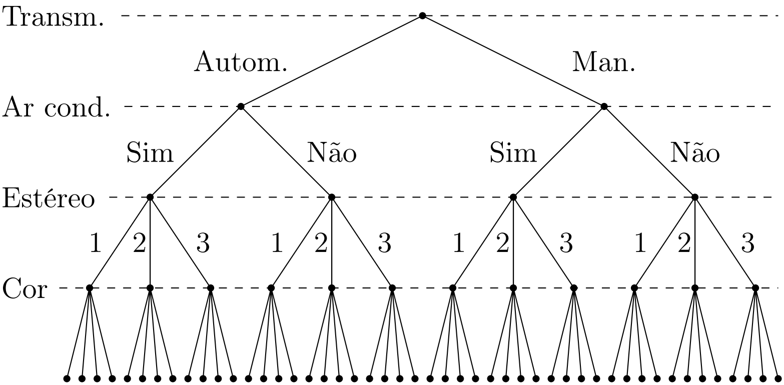
Um fabricante fornece automóveis que podem ser equipados com os opcionais escolhidos pelo consumidor. Cada veículo pode ser escolhido:

- com ou sem transmissão automática;
- com ou sem ar condicionado;
- com um dos três tipos de sistema estéreo;
- com uma das quatro cores exteriores.

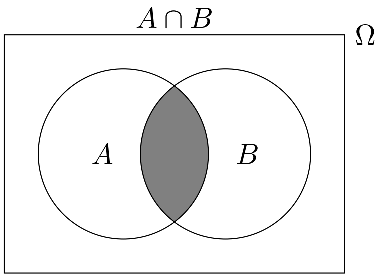


Um fabricante fornece automóveis que podem ser equipados com os opcionais escolhidos pelo consumidor. Cada veículo pode ser escolhido:

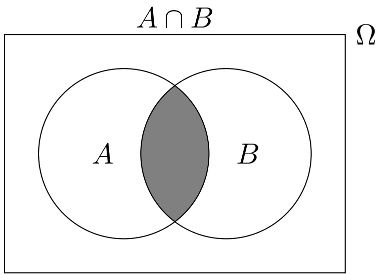
- com ou sem transmissão automática;
- com ou sem ar condicionado;
- com um dos três tipos de sistema estéreo;
- com uma das quatro cores exteriores.

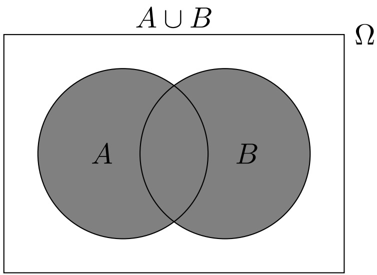


Diagramas de Venn

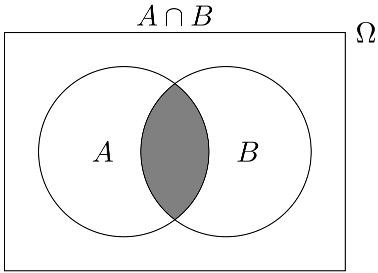


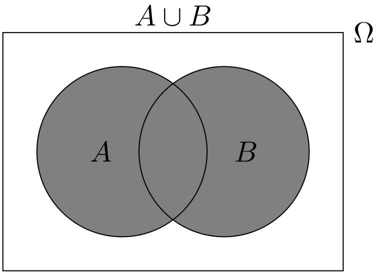
Diagramas de Venn

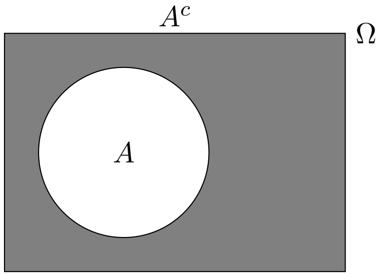




Diagramas de Venn

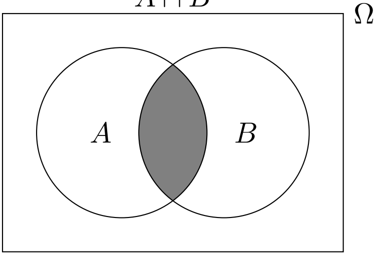




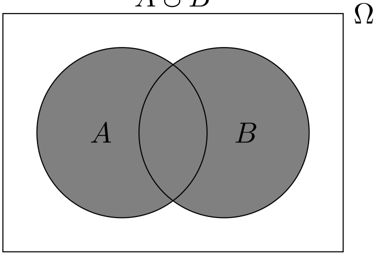


Diagramas de Venn

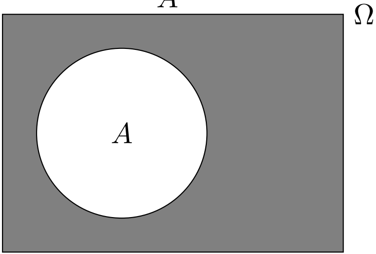
$A \cap B$



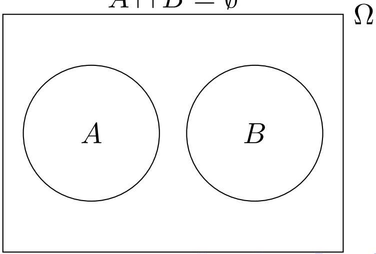
$A \cup B$



A^c



$A \cap B = \emptyset$



Definição

Sejam $A, B \subset \Omega$ *dois eventos. Dizemos que* A *e* B *são mutuamente excludentes (ou mutuamente exclusivos, ou disjuntos) se* $A \cap B = \emptyset$.

O quarto diagrama de Venn do *slide* representa dois eventos mutuamente excludentes.

Estrutura

Estrutura

Interpretação de probabilidade

A princípio consideremos um espaço amostral finito $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ (ou infinito contável $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$).

Existem duas interpretações básicas de probabilidade:

- subjetivista: quando a probabilidade de um evento A, $P(A)$, representa o "grau de crença" que se tem com respeito a ocorrência de A. Nesse ponto de vista, indivíduos diferentes podem atribuir probabilidades diferentes para o mesmo evento A;
- frequentista: quando a probabilidade atribuida a um evento A, $P(A)$, é interpretada como o limite da frequência relativa desse evento em n repetições idênticas do experimento. Neste caso, o limite é avaliado quando $n \to \infty$.

Seja A = "chover no dia de finados". Se atribuirmos ao evento A a probabilidade $P(A) = 0.8$. Temos as seguintes interpretações:

- subjetivista: segundo a minha experiência, o grau de crença que eu tenho de que choverá no dia de finados é de 0.8 (ou 80%);
- frequentista: se fosse possível observar indefinidamente o dia de finados ano a ano, a proporção de anos em que o dia de finados é chuvoso seria próxima de 0.8 e ficaria mais próxima conforme aumentassemos o periodo de observação.

Estrutura

Axiomas de probabilidade

Definição

Uma medida de probabilidade é qualquer função de eventos $P(\cdot)$ *que satisfaça as seguintes propriedades:*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $P(A) \geq 0$, *se* $A \subset \Omega$ *é evento;*
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *se* $A, B \subset \Omega$ *são eventos mutuamente excludentes, isto é, se* $A \cap B = \emptyset$.

Comentário

Os axiomas de probabilidade não determinam probabilidades. As probabilidades devem ser atribuidas com base no nosso conhecimento do fenômeno em estudo e devem sempre ser estabelecidas de forma que obedeçam os axiomas acima.

Propriedades

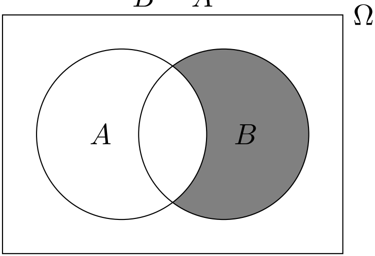
Sejam Ω espaço amostral e $A, B \subset \Omega$ eventos. Uma função de probabilidade definida de acordo com os axiomas de probabilidade satisfaz as seguintes propriedades:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(A) \leq P(B)$, se $A \subset B$;
4. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, onde $B - A = B \cap A^c$;
5. $P(B - A) = P(B) - P(A)$, se $A \subset B$;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

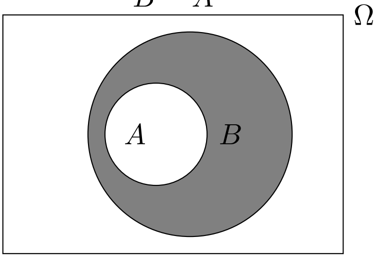
Exercício: Mostre que, se $A_1, \ldots, A_n$ é uma sequência de eventos mutuamente excludentes (isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$), então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

$B - A$



$B - A$



Exemplo

Discos de policarbonato plástico são analisados com relação a resistência a arranhões e choque. Os resultados de 100 discos são resumidos a seguir:

Res. a arranhão	Res. a choque		Total
	Alta	Baixa	
Alta	80	9	89
Baixa	6	5	11
Total	86	14	100

Suponha que um disco será selecionado ao acaso. Sejam A = "resist. a arranhões alta" e B = "resist. a choques alta". Qual a probabilidade que você atribuiria para os eventos:

- $P(A \cap B)$;
- $P(A \cup B)$;
- $P(B - A)$;

Exemplo

Discos de policarbonato plástico são analisados com relação a resistência a arranhões e choque. Os resultados de 100 discos são resumidos a seguir:

Res. a arranhão	Res. a choque		Total
	Alta	Baixa	
Alta	80	9	89
Baixa	6	5	11
Total	86	14	100

Suponha que um disco será selecionado ao acaso. Sejam $A =$ "resist. a arranhões alta" e $B =$ "resist. a choques alta". Qual a probabilidade que você atribuiria para os eventos:

- $P(A \cap B) = 0.8$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.89 + 0.86 - 0.80 = 0.95$;
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.86 - 0.8 = 0.06$.

Estrutura

Probabilidade condicional

Imagine a seguinte situação:

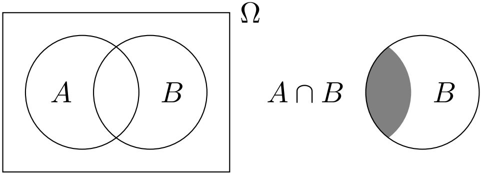
- um canal digital de comunicação tem uma taxa de erro de um *bit* por cada mil transferidos;
- embora raros, erros dessa natureza tendem a ocorrer em sequência;
- portanto, se um único *bit* for transmitido, podemos atribuir a probabilidade de erro de comunicação de 1/1000;
- entretanto, se soubermos que o *bit* anterior apresentou erro, o bom senso diz que o próximo *bit* terá probabilidade de erro maior do que 1/1000.

No exemplo acima, o conhecimento da ocorrência de erro no *bit* anterior, altera a probabilidade de erro no próximo *bit*.
Em outras palavras, é possível "atualizar" a probabilidade de um evento quando temos informação da ocorrência de outro.

Definição

Sejam $A, B \subset \Omega$ *eventos. A probabilidade condicional do evento* A*, dada a ocorrência do evento* B*, é dada por*

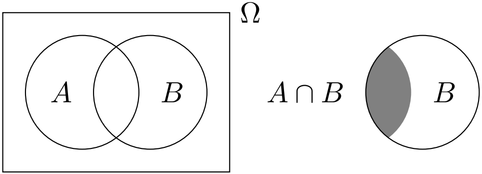
$$P(A|B) = \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, & se\ P(B) > 0, \\ P(A), & se\ P(B) = 0. \end{cases}$$



Definição

Sejam $A, B \subset \Omega$ eventos. A probabilidade condicional do evento A, dada a ocorrência do evento B, é dada por

$$P(A|B) = \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, & se\ P(B) > 0, \\ P(A), & se\ P(B) = 0. \end{cases}$$



Retornemos ao exemplo dos discos de policarbonato plástico. Temos que

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.09}{0.14} \approx 0.64.$$

Assim, concluimos que, saber que o disco tem baixa resistência a choque diminui a probabilidade dele ter alta resistência a arranhão de 0.89 para 0.64.

Estrutura

Teorema da probabilidade total

Definição

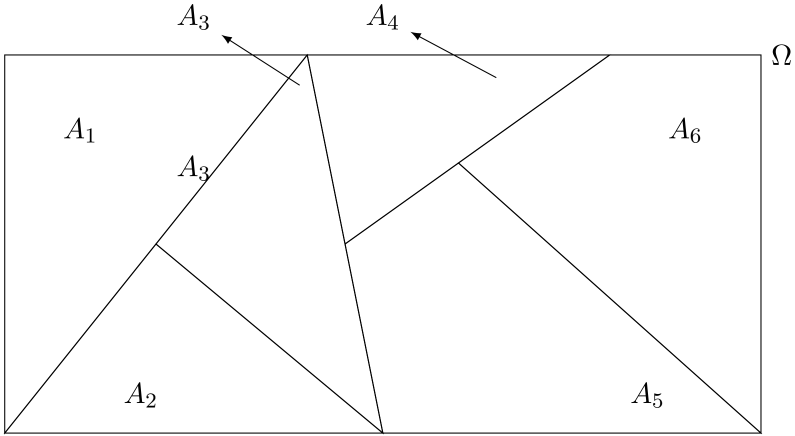
Uma sequência de eventos $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ *é uma partição do espaço amostral se*

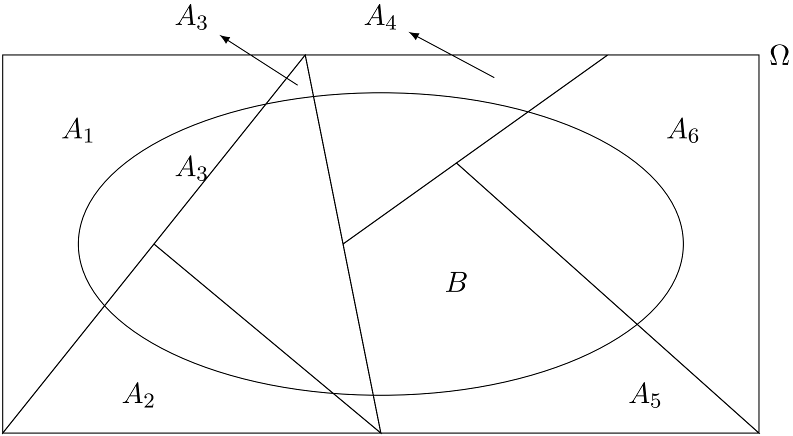
$$A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j, \quad e \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Teorema

Seja $A_1, \ldots, A_n$ *uma partição e* B *evento do espaço amostral* Ω*. Então*

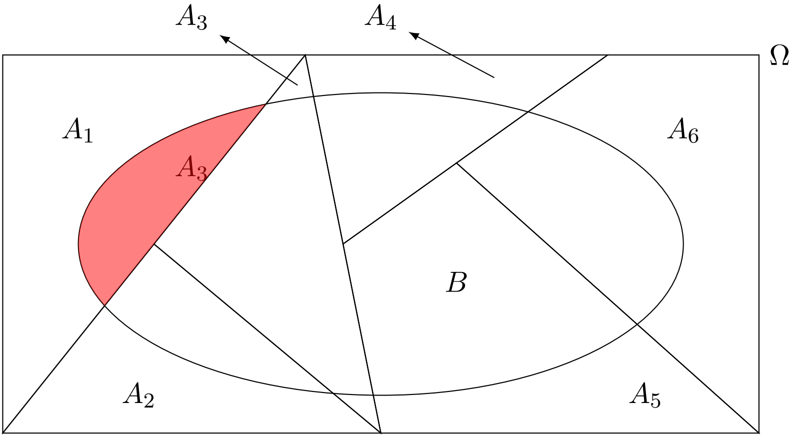
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

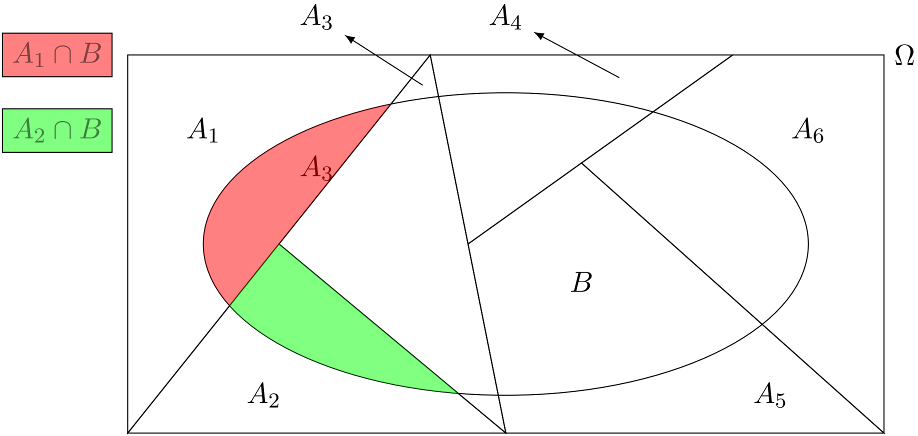

A_3
A_4
Ω
A_1
A_3
A_6
A_2
A_5



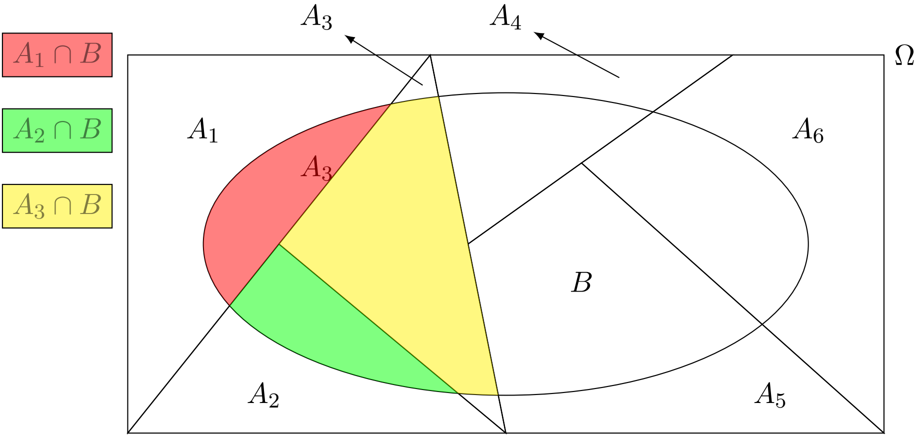
A_3
A_4
Ω
A_1
A_6
A_3
B
A_2
A_5

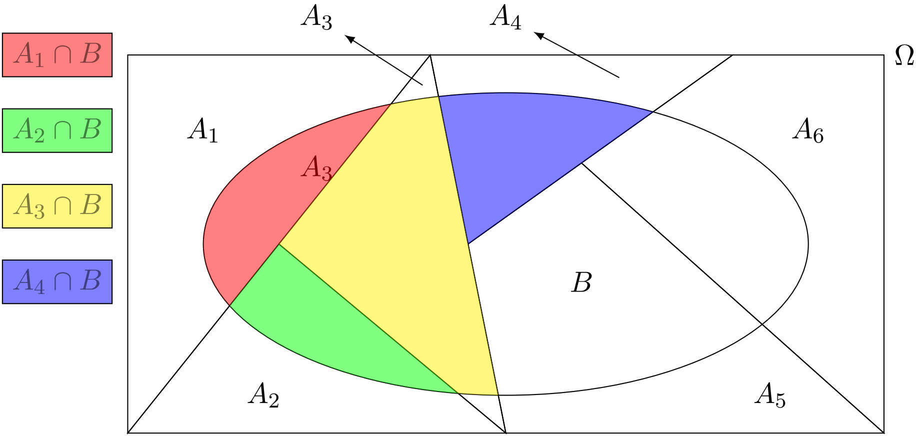
$A_1 \cap B$

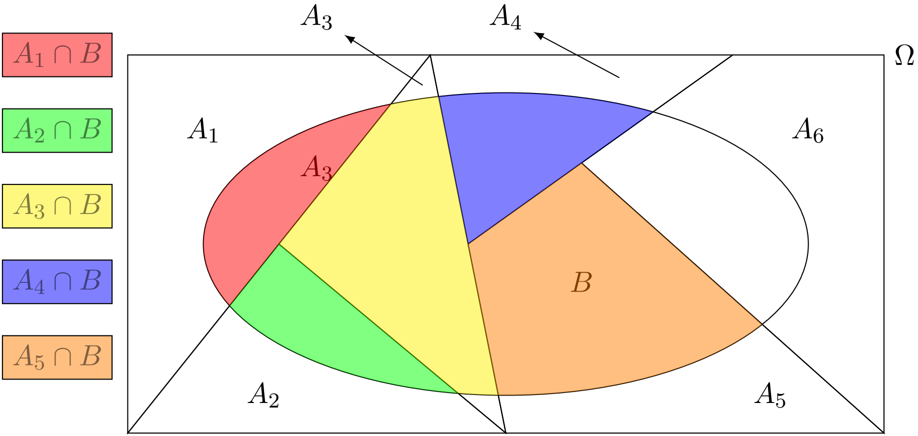


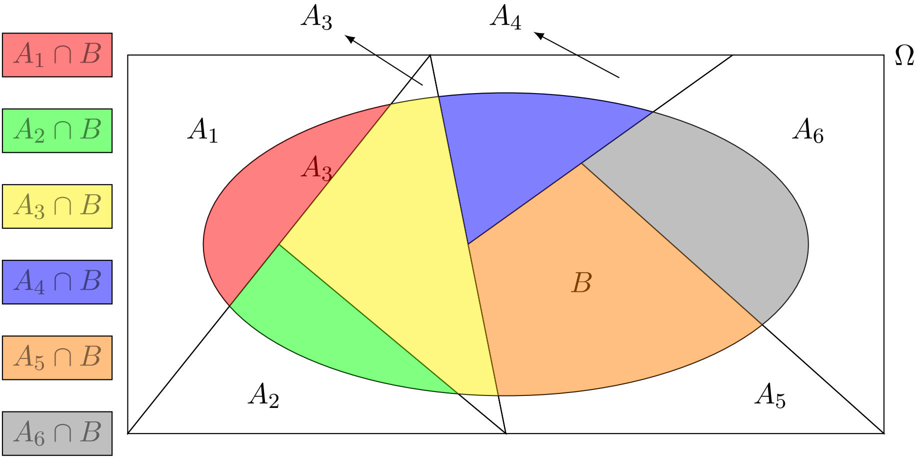


$A_1 \cap B$
$A_2 \cap B$
A_3
A_4
Ω
A_1
A_3
A_6
B
A_2
A_5


$A_1 \cap B$
$A_2 \cap B$
$A_3 \cap B$
A_3
A_4
Ω
A_1
A_3
A_6
B
A_2
A_5


$A_1 \cap B$
$A_2 \cap B$
$A_3 \cap B$
$A_4 \cap B$
A_3
A_4
Ω
A_1
A_3
A_6
B
A_2
A_5


$A_1 \cap B$
$A_2 \cap B$
$A_3 \cap B$
$A_4 \cap B$
$A_5 \cap B$
A_3
A_4
Ω
A_1
A_3
A_6
B
A_2
A_5


$A_1 \cap B$
$A_2 \cap B$
$A_3 \cap B$
$A_4 \cap B$
$A_5 \cap B$
$A_6 \cap B$
A_3
A_4
Ω
A_1
A_3
A_6
B
A_2
A_5

Exemplo

Ocorre que em muitas situações é mais fácil conhecer a probabilidade condicional de algum evento dado outro e utilizar o teorema anterior para acessar a probabilidade incondicional do primeiro.

Exemplo: Num total de 25 peças, 5 delas sofreram excessivo encolhimento. Se duas peças são selecionadas ao acaso, qual será a probabilidade de que a segunda tenha sofrido excessivo encolhimento?

Seja E_i = "i-ésima peça ter sofrido excessivo encolhimento", $i = 1, 2$. Note que

$$P(E_1) = 5/25, P(E_1^c) = 20/25, P(E_2|E_1) = 4/24 \text{ e } P(E_2|E_1^c) = 5/24.$$

Além disso, E_1, E_1^c formam uma partição de Ω, portanto o teorema anterior pode ser utilizado para encontrar $P(E_2)$ e fornece

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = \frac{5}{25}\frac{4}{24} + \frac{20}{25}\frac{5}{24} \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Estrutura

Independência

Em alguns casos a probabilidade condicional de um evento A dado ocorrência de B pode ser idêntica a probabilidade incondicional. Nestes casos, dizemos que A e B são independentes.

Definição

Sejam $A, B \subset \Omega$ eventos. Dizemos que A e B são independentes se qualquer uma das seguintes afirmações for verdadeira:

- $P(A|B) = P(A)$;
- $P(B|A) = P(B)$.

Exercício: Mostre que, se A e B são eventos independentes, então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Comentário

É importante ressaltar que eventos independentes não necessariamente são disjuntos. De fato, se dois eventos $A, B \in \Omega$ são disjuntos, eles são fortemente DEPENDENTES. Afinal, a ocorrência de um exclui completamente a possibilidade da ocorrência do outro. Em outras palavras, como A e B são disjuntos, temos que

$$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \text{ e } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.$$

A única maneira de A e B serem disjuntos e independentes é quando pelo menos um dos dois eventos tem probabilidade zero. Para ver isso, note que

$$0 = P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A) = 0 \text{ ou } P(B) = 0.$$

Estrutura

Teorema de Bayes

É possível inverter a ordem que condicionamos os eventos através do Teorema de Bayes.

Teorema

Sejam $A, B \subset \Omega$ eventos. Então

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}, \ \textit{se } P(A) > 0.$$

Retornemos ao exemplo das peças que sofreram excessivo encolhimento. Se uma pessoa analisou a segunda peça e disse que, de fato, ela sofreu excessivo encolhimento. Qual a probabilidade de que a primeira peça também tenha sofrido?

Queremos encontrar $P(E_1|E_2)$ e, pelo Teorema de Bayes, temos que

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{\frac{5}{25}\frac{4}{24}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Estrutura

Estrutura

Introdução

Consideremos os experimentos:

1. E_1 = "duas peças de uma linha de produção são inspecionadas e classificadas como 'defeituosa' (D) ou 'não defeituosa' (N)";
2. E_2 = "uma linha de produção é observada até a produção da primeira peça defeituosa";
3. E_3 = "um ponto em um círculo de raio unitário é escolhido ao acaso".

Consideremos os experimentos:

1. E_1 = "duas peças de uma linha de produção são inspecionadas e classificadas como 'defeituosa' (D) ou 'não defeituosa' (N)";
2. E_2 = "uma linha de produção é observada até a produção da primeira peça defeituosa";
3. E_3 = "um ponto em um círculo de raio unitário é escolhido ao acaso".

Defina:

1. em E_1, X_1 = "número de peças defeituosas observadas";
2. em E_2, X_2 = "número de peças produzidas até a interrupção";
3. em E_3, X_3 = "distância do ponto sorteado ao centro do círculo".

Introdução

Consideremos os experimentos:

1. E_1 = "duas peças de uma linha de produção são inspecionadas e classificadas como 'defeituosa' (D) ou 'não defeituosa' (N)";
2. E_2 = "uma linha de produção é observada até a produção da primeira peça defeituosa";
3. E_3 = "um ponto em um círculo de raio unitário é escolhido ao acaso".

Defina:

1. em E_1, X_1 = "número de peças defeituosas observadas";
2. em E_2, X_2 = "número de peças produzidas até a interrupção";
3. em E_3, X_3 = "distância do ponto sorteado ao centro do círculo".

Observe que X_1, X_2 e X_3 são funções (numéricas) dos resultados (não necessariamente numéricos) do experimento aleatório ao qual estão associadas. Neste caso, dizemos que X_1, X_2 e X_3 são **variáveis aleatórias**.

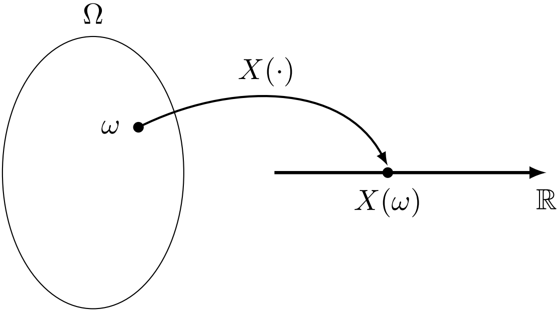
Definição de variável aleatória

Definição

Sejam Ω espaço amostral de um experimento aleatório E e $\omega \in \Omega$ um de seus resultados. Se

$$X: \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{array}$$

dizemos que X é variável aleatória (v.a.).



Tipos de variáveis aleatórias

Definição

O conjunto de todos os possíveis valores que uma variável aleatória X pode assumir é denominado **imagem** *de X e denotado por $Im(X)$.*

Temos que

1. $Im(X_1) = \{0, 1, 2\}$;
2. $Im(X_2) = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
3. $Im(X_3) = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.

Tipos de variáveis aleatórias

Definição

O conjunto de todos os possíveis valores que uma variável aleatória X pode assumir é denominado **imagem** *de X e denotado por $Im(X)$.*

Temos que

1. $Im(X_1) = \{0, 1, 2\}$;
2. $Im(X_2) = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
3. $Im(X_3) = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.

Há diferenças entre $Im(X_1)$, $Im(X_2)$ e $Im(X_3)$:

1. $Im(X_1)$ é um conjunto finito;
2. $Im(X_2)$ é um conjunto infinito contável (ou enumerável);
3. $Im(X_3)$ é um conjunto infinito não contável (ou não enumerável).

Definição

Dizemos que uma variável aleatória X é **discreta** *se $Im(X)$ é um conjunto finito ou infinito enumerável.*

Definição

Dizemos que uma variável aleatória X é **contínua** *se $Im(X)$ é um conjunto não-enumerável.*

Portanto, X_1 e X_2 são v.a. discretas, enquanto X_3 é v.a. contínua.

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação $\rightarrow$ discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação $\rightarrow$ discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina $\rightarrow$ contínua;
- O diâmetro de externo de um eixo usinado

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação $\rightarrow$ discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina $\rightarrow$ contínua;
- O diâmetro de externo de um eixo usinado $\rightarrow$ contínua;
- O número de fraturas que excedem meia polegada em 10 milhas de uma auto-estrada interestadual

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação $\rightarrow$ discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina $\rightarrow$ contínua;
- O diâmetro de externo de um eixo usinado $\rightarrow$ contínua;
- O número de fraturas que excedem meia polegada em 10 milhas de uma auto-estrada interestadual $\rightarrow$ discreta;
- O peso de uma peça plástica moldada por injeção

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação $\rightarrow$ discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina $\rightarrow$ contínua;
- O diâmetro de externo de um eixo usinado $\rightarrow$ contínua;
- O número de fraturas que excedem meia polegada em 10 milhas de uma auto-estrada interestadual $\rightarrow$ discreta;
- O peso de uma peça plástica moldada por injeção $\rightarrow$ contínua;
- O número de moléculas em uma amostra de gás

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação $\rightarrow$ discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina $\rightarrow$ contínua;
- O diâmetro de externo de um eixo usinado $\rightarrow$ contínua;
- O número de fraturas que excedem meia polegada em 10 milhas de uma auto-estrada interestadual $\rightarrow$ discreta;
- O peso de uma peça plástica moldada por injeção $\rightarrow$ contínua;
- O número de moléculas em uma amostra de gás $\rightarrow$ discreta;
- A concentração de saída de um reator

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação $\rightarrow$ discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina $\rightarrow$ contínua;
- O diâmetro de externo de um eixo usinado $\rightarrow$ contínua;
- O número de fraturas que excedem meia polegada em 10 milhas de uma auto-estrada interestadual $\rightarrow$ discreta;
- O peso de uma peça plástica moldada por injeção $\rightarrow$ contínua;
- O número de moléculas em uma amostra de gás $\rightarrow$ discreta;
- A concentração de saída de um reator $\rightarrow$ contínua;
- A corrente em um circuito elétrico

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra → contínua;
- O número de vezes que um transistor em uma memória de computador muda de estado em uma operação → discreta;
- O volume de gasolina que é perdido por evaporação, durante o enchimento de um tanque de gasolina → contínua;
- O diâmetro de externo de um eixo usinado → contínua;
- O número de fraturas que excedem meia polegada em 10 milhas de uma auto-estrada interestadual → discreta;
- O peso de uma peça plástica moldada por injeção → contínua;
- O número de moléculas em uma amostra de gás → discreta;
- A concentração de saída de um reator → contínua;
- A corrente em um circuito elétrico → contínua.

1. O resultado ω é desconhecido *a priori*;
2. O valor resultante da v.a. $X(\omega)$ também o é;
3. Devemos tratar probabilisticamente X;
4. Abordagens diferentes nos casos discreto e contínuo.

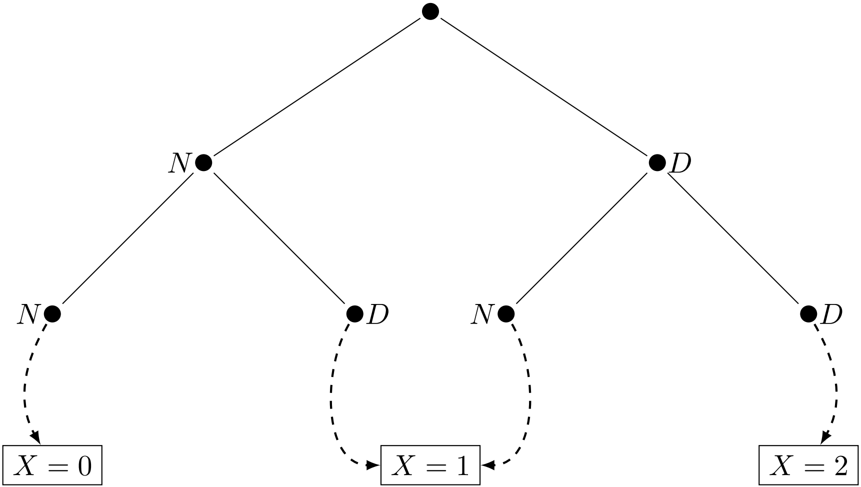
Estrutura

Relembremos a v.a. X_1. Temos que $Im(X_1) = \{0, 1, 2\}$. Perceba que cada valor $x \in Im(X_1)$ induz a um evento em Ω e esses eventos formam uma partição do espaço amostral. Isto é, $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$, $x = 0, 1, 2$, formam uma partição de Ω. Em outras palavras:

- $A_0 = \{(N, N)\}$;
- $A_1 = \{(N, D), (D, N)\}$;
- $A_2 = \{(D, D)\}$.

Portanto, é natural definir a probabilidade da v.a. assumir um valor x como a probabilidade do evento induzido por x. Isto é,

$$P(X = x) = P(A_x),\ x = 0, 1, 2.$$


N
D
N
D
N
D
X = 0
X = 1
X = 2

Adicione ao exemplo anterior as suposições de que as peças são classificadas como defeituosas com probabilidade $p \geq 0$ e de que as classificações das peças são independentes. Assim, temos que

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(A_0) = P(\{(N,N)\}) = P(\{N\})P(\{N\}) \\ &= (1-p)(1-p) = (1-p)^2, \\ P(X=1) &= P(A_1) = P(\{(N,D),(D,N)\}) \\ &= P(\{(N,D)\}) + P(\{(D,N)\}) \\ &= P(\{N\})P(\{D\}) + P(\{D\})P(\{N\}) \\ &= p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(A_2) = P(\{(D,D)\}) = P(\{D\})P(\{D\}) \\ &= p \cdot p = p^2. \end{aligned}$$

Função de probabilidade

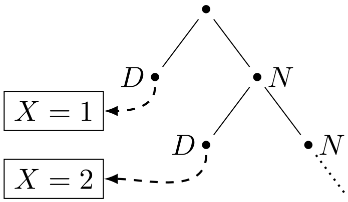
Definição

Sejam X v.a. discreta com imagem $Im(X)$ e A_x, $x \in Im(X)$, a partição de Ω induzida pelos possíveis valores de X. A função de probabilidade (f.p.) de X é definida por

$$P_X(x) = P(X = x) = P(A_x), x \in Im(X).$$

Exercício: Relembre a v.a. X_2. Suponha que a probabilidade de se classificar uma peça defeituosa é p e que as peças são classificadas de maneira independente. Encontre a função de probabilidade de X_2.

Dica:



Propriedades de uma f.p.

Seja X v.a. discreta com imagem $Im(X)$. A função de probabilidade $P_X(x)$, $x \in Im(X)$, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $P_X(x) = P(A_x) \geq 0$, $\forall x \in Im(X)$, pois A_x é evento de Ω;
2. $\sum_{x \in Im(X)} P_X(x) = \sum_{x \in Im(X)} P(A_x) = 1$, afinal A_x, $x \in Im(X)$, é uma partição de Ω.

Retornando à v.a. X_1, é fácil ver que $P_X(x) \geq 0$, $x \in Im(X)$. Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{x \in Im(X)} P_X(x) &= \sum_{x=0}^{2} P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= (1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2 = (1-p)(1-p+2p) + p^2 \\
&= (1-p)(1+p) + p^2 = 1 - p^2 + p^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Exercício: Mostre que as propriedades (1) e (2) acima também valem para a f.p. da v.a. X_2.

Comentário

Podemos imaginar a função de probabilidades de uma variável aleatória como sendo um **modelo** *para a distribuição de frequências de uma variável quantitativa discreta.*

Por exemplo, suponha que um dado honesto é arremessado. Qual a função de probabilidade da v.a. discreta $X =$ "face do dado voltada para cima"?
Temos que $Im(X) = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Como supomos que o dado é honesto, podemos postular que todas as faces ocorrem com a mesma probabilidade. Assim, a f.p. de X é dada por

$$P_X(x) = \frac{1}{6},\ x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Portanto, se repetissemos o arremesso do dado uma quantidade grande de vezes, esperariamos que a frequência relativa da face x se aproximasse do modelo postulado $P_X(x)$.

	n	Face 1	2	3	4	5	6
Prob.	-	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
Freq.	50	0.220	0.200	0.120	0.100	0.160	0.200
	200	0.145	0.150	0.195	0.185	0.180	0.145
	10000	0.159	0.166	0.165	0.175	0.168	0.168

Função de distribuição cumulativa

Suponha que no exemplo anterior (arremesso do dado), estejamos interessados em $P(X \leq 2)$. Essa probabilidade é facilmente obtida. De fato

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P\left(\bigcup_{k \leq 2}\{X = k\}\right) = \sum_{k \leq 2} P(X = k) \\
&= P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Podemos generalizar a probabilidade **cumulativa** acima.

Definição

Seja X v.a. discreta com f.p. $P_X(x)$. A função de distribuição cumulativa (f.d.c.) de X é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k), \; x \in \mathbb{R}.$$

Comentário

Note que a f.d.c. $F_X(x)$ de uma v.a. discreta X é definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e não somente para aqueles $x \in Im(X)$;

Retornemos ao exemplo do arremesso do dado. Temos que

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} P(X = k) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{6}, & 1 \leq x \leq 6, \\ 1, & x > 6, \end{cases}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$.

Comentário

É possível utilizar a f.d.c. de uma v.a. discreta para determinar a sua função de probabilidade.

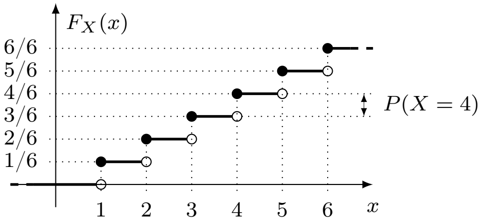
Observe no gráfico abaixo que

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-), \; x \in Im(X),$$

isto é, a f.p. de X no ponto x, $P_X(x)$, é o **salto** que ocorre na f.d.c. de X neste ponto. Na equação acima, a expressão

$$F_X(x^-) := \lim_{t \to x^-} F_X(t),$$

isto é, o limite de $F_X(t)$ quando t tende a x pela esquerda.



Outras propriedades da f.d.c. são:

- $F_X(x) \to 0$, quando $x \to -\infty$;
- $F_X(x) \to 1$, quando $x \to \infty$;
- $x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$;

Exercício: Calcule e esboce o gráfico da função de distribuição cumulativa da variável X_2.

Esperança e variância

Definição

Seja X v.a. discreta com f.p. $P_X(x)$. A **esperança** *e a* **variância** *de X são definidas, respectivamente, por*

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in Im(X)} x P_X(x)$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x \in Im(X)} (x - \mu)^2 P_X(x) = \sum_{x \in Im(X)} x^2 P_X(x) - \mu^2.$$

Nas duas equações acima vimos que valores com maior probabilidade têm mais peso no cálculo da esperança e da variância.

Da mesma forma que a f.p. representa um modelo teórico para as frequências relativas, a esperança μ e a variância σ^2 representam valores teóricos para a média $\bar{x}$ e a variância s^2.
Dessa forma, esperamos que ao repetir o experimento uma quantidade muito grande de vezes, esperamos que os valores de $\bar{x}$ e de s^2 se aproximem de μ e σ^2, respectivamente.
Retornemos ao exemplo do arremesso do dado. Temos que

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{6} x P_X(x) = 1\frac{1}{6} + \cdots + 6\frac{1}{6} = \frac{1 + \cdots + 6}{6} = 3.5$$

e

$$\begin{aligned}\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x=1}^{6} x^2 P_X(x) - \mu^2 &= 1^2\frac{1}{6} + \cdots + 6^2\frac{1}{6} - 3.5^2 \\ &= \frac{1^2 + \cdots + 6^2}{6} - 12.25 = \frac{91}{6} - 12.25 \approx 15.167 - 12.25 = 2.917.\end{aligned}$$

Valores teóricos	μ	σ^2
	3.5	2.917
n	$\bar{x}$	s^2
50	3.380	3.424
200	3.630	2.948
10000	3.499	2.904

Exercício: Encontre os valores de $E(X_2)$ e $Var(X_2)$.

Sejam X e Y v.a. discretas e a e b constantes. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(a) = a$;

Sejam X e Y v.a. discretas e a e b constantes. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(a) = a$;
- $Var(a) = 0$;

Sejam X e Y v.a. discretas e a e b constantes. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(a) = a$;
- $Var(a) = 0$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$;

Sejam X e Y v.a. discretas e a e b constantes. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(a) = a$;
- $Var(a) = 0$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$;

Sejam X e Y v.a. discretas e a e b constantes. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(a) = a$;
- $Var(a) = 0$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

Sejam X e Y v.a. discretas e a e b constantes. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(a) = a$;
- $Var(a) = 0$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- Se X e Y são v.a. discretas independentes, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

O lucro L obtido na venda da liga depende do número de falhas X na mesma da seguinte forma, $L = 4 - 2X$. Na venda da liga, qual o lucro esperado e a sua variância?

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

O lucro L obtido na venda da liga depende do número de falhas X na mesma da seguinte forma, $L = 4 - 2X$. Na venda da liga, qual o lucro esperado e a sua variância?
Temos que

$$\mu = E(X) = 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x=0}^{3} x^2 P_X(x) - \mu^2 = 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 - 1 = 1.$$

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

O lucro L obtido na venda da liga depende do número de falhas X na mesma da seguinte forma, $L = 4 - 2X$. Na venda da liga, qual o lucro esperado e a sua variância?

Temos que

$$\mu = E(X) = 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x=0}^{3} x^2 P_X(x) - \mu^2 = 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 - 1 = 1.$$

Logo $E(L) = 4 - 2E(X) = 2$ e $Var(L) = 2^2 Var(X) = 4$.

Estrutura

Modelo uniforme discreto

Definição

Seja X *v.a. discreta com imagem* $Im(X) = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$, *onde* $a \leq b \in \mathbb{Z}$. *Dizemos que* X *tem distribuição uniforme entre* a *e* b *se*

$$P_X(x) = \frac{1}{b-a+1}, \; x = a, a+1, \ldots, b-1, b.$$

Notação: $X \sim UD(a, b)$.

Temos que se $X \sim UD(a, b)$, então

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

Exemplo

Uma empresa tem 48 linhas telefônicas a para atendimento ao consumidor. Em determinado instante o sistema de atendimento é observado. Defina $X =$ "número de linhas em uso" e suponha que X tem distribuição uniforme discreta. Qual a esperança e a variância de X?

Exemplo

Uma empresa tem 48 linhas telefônicas a para atendimento ao consumidor. Em determinado instante o sistema de atendimento é observado. Defina $X =$ "número de linhas em uso" e suponha que X tem distribuição uniforme discreta. Qual a esperança e a variância de X?
É óbvio que, neste caso, $a = 0$ e $b = 48$.

Exemplo

Uma empresa tem 48 linhas telefônicas a para atendimento ao consumidor. Em determinado instante o sistema de atendimento é observado. Defina $X =$ "número de linhas em uso" e suponha que X tem distribuição uniforme discreta. Qual a esperança e a variância de X?
É óbvio que, neste caso, $a = 0$ e $b = 48$.
Portanto, temos que $\mu = E(X) = \frac{48}{2} = 24$ e que $\sigma^2 = Var(X) = \frac{48 \cdot 50}{12} = 200$.
Exercício: Considere ainda o exemplo acima e defina $Y =$ "percentual de linhas em uso". Qual a esperança e a variância de Y.

Definição

Considere um experimento E o qual pode ocasionar apenas dois resultados: s = "sucesso"; e f = "fracasso". O espaço amostral desse experimento é:

$$\Omega_E = \{s, f\}.$$

Denominamos E de **experimento de Bernoulli**.

Exemplos: Observe alguns experimentos de Bernoulli a seguir:

- E = "observar uma amostra de ar e verificar se ela possui alguma molécula rara";
- E = "observar um bit transmitido através de um canal digital e verificar se ele foi recebido com erro";
- E = "em uma questão de múltipla escolha um candidato tenta adivinhar a resposta correta".

Seja E o experimento que consiste em n repetições **independentes** de um experimento de Bernoulli nos quais a probabilidade de sucesso $P(\{s\}) := p$ permanece **inalterada**. Defina $X =$ "o número de sucessos observados nas n réplicas".

Seja E o experimento que consiste em n repetições **independentes** de um experimento de Bernoulli nos quais a probabilidade de sucesso $P(\{s\}) := p$ permanece **inalterada**. Defina $X =$ "o número de sucessos observados nas n réplicas".
É evidente que $Im(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$. Vamos encontrar a f.p. de X, ou seja, desejamos obter $P_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, \ldots, n$.

Seja E o experimento que consiste em n repetições **independentes** de um experimento de Bernoulli nos quais a probabilidade de sucesso $P(\{s\}) := p$ permanece **inalterada**. Defina $X =$ "o número de sucessos observados nas n réplicas".
É evidente que $Im(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$. Vamos encontrar a f.p. de X, ou seja, desejamos obter $P_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, \ldots, n$.

- Fixe algum $x \in Im(X)$;

Seja E o experimento que consiste em n repetições **independentes** de um experimento de Bernoulli nos quais a probabilidade de sucesso $P(\{s\}) := p$ permanece **inalterada**. Defina $X =$ "o número de sucessos observados nas n réplicas".

É evidente que $Im(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$. Vamos encontrar a f.p. de X, ou seja, desejamos obter $P_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, \ldots, n$.

- Fixe algum $x \in Im(X)$;
- Em n repetições, x sucessos (e $n - x$ fracassos) ocorrem com probabilidade $p^x(1-p)^{n-x}$;

Seja E o experimento que consiste em n repetições **independentes** de um experimento de Bernoulli nos quais a probabilidade de sucesso $P(\{s\}) := p$ permanece **inalterada**. Defina $X =$ "o número de sucessos observados nas n réplicas".
É evidente que $Im(X) = \{0, 1, \dots, n\}$. Vamos encontrar a f.p. de X, ou seja, desejamos obter $P_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, \dots, n$.

- Fixe algum $x \in Im(X)$;
- Em n repetições, x sucessos (e $n - x$ fracassos) ocorrem com probabilidade $p^x(1-p)^{n-x}$;
- Não importa a ordem em que os x sucessos e os $n - x$ fracassos ocorrem, a probabilidade acima permanece inalterada. Por exemplo:

$$P(\{\overbrace{s \dots s s}^{x} \overbrace{f f \dots f}^{n-x}\}) = P(\{\overbrace{s \dots s}^{x-1} f s \overbrace{f \dots f}^{n-x-1}\}) = p^x(1-p)^{n-x};$$

A pergunta que surge é: de quantas maneiras diferentes podemos ter x sucessos em n repetições?

Posição escolhida	$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	$\ldots$	x-ésima
Posições disponíveis	n	$n-1$	$\ldots$	$n-x+1$

A pergunta que surge é: de quantas maneiras diferentes podemos ter x sucessos em n repetições?

Posição escolhida	$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	...	x-ésima
Posições disponíveis	n	$n-1$	...	$n-x+1$

A princípio poderiamos imaginar **erroneamente** que temos

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

maneiras de ter x sucessos em n repetições. Na equação acima $a! = a(a-1)\ldots 2 \cdot 1$. Define-se $0! = 1$.

A pergunta que surge é: de quantas maneiras diferentes podemos ter x sucessos em n repetições?

Posição escolhida	$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	$\ldots$	x-ésima
Posições disponíveis	n	$n-1$	$\ldots$	$n-x+1$

A princípio poderiamos imaginar **erroneamente** que temos

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

maneiras de ter x sucessos em n repetições. Na equação acima $a! = a(a-1)\ldots 2\cdot 1$. Define-se $0! = 1$. Entretanto, existem redundâncias nestas combinações. Por exemplo, tome $n = 4$ e $x = 2$. Adotando o raciocínio acima teriamos as seguintes combinações de posições

$$\begin{matrix} (1,2) & (2,1) & (3,1) & (4,1) \\ (1,3) & (2,3) & (3,2) & (4,2) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,3) \end{matrix} \Rightarrow \tfrac{n!}{(n-x)!} = \tfrac{4!}{2!} = 12.$$

A pergunta que surge é: de quantas maneiras diferentes podemos ter x sucessos em n repetições?

Posição escolhida	$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	$\ldots$	x-ésima
Posições disponíveis	n	$n-1$	$\ldots$	$n-x+1$

A princípio poderiamos imaginar **erroneamente** que temos

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

maneiras de ter x sucessos em n repetições. Na equação acima $a! = a(a-1)\ldots 2 \cdot 1$. Define-se $0! = 1$. Entretanto, existem redundâncias nestas combinações. Por exemplo, tome $n = 4$ e $x = 2$. Adotando o raciocínio acima teriamos as seguintes combinações de posições

$$\begin{matrix} (1,2)^1 & (2,1)^1 & (3,1)^2 & (4,1)^3 \\ (1,3)^2 & (2,3)^4 & (3,2)^4 & (4,2)^5 \\ (1,4)^3 & (2,4)^5 & (3,4)^6 & (4,3)^6 \end{matrix} \Rightarrow \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Logo, devemos dividir $\frac{n!}{(n-x)!}$ pela quantidade de permutações que podemos fazer com as x posições escolhidas, a saber:

Logo, devemos dividir $\frac{n!}{(n-x)!}$ pela quantidade de permutações que podemos fazer com as x posições escolhidas, a saber: $x!$.

Logo, devemos dividir $\frac{n!}{(n-x)!}$ pela quantidade de permutações que podemos fazer com as x posições escolhidas, a saber: $x!$. Portanto, observamos que obtem-se x sucessos em n repetições de

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} := \binom{n}{x}$$

maneiras possíveis.

Logo, devemos dividir $\frac{n!}{(n-x)!}$ pela quantidade de permutações que podemos fazer com as x posições escolhidas, a saber: $x!$. Portanto, observamos que obtem-se x sucessos em n repetições de

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} := \binom{n}{x}$$

maneiras possíveis.
Dessa forma,

$$\begin{aligned} P_X(x) = P(X = x) &= \overbrace{p^x(1-p)^{n-x} + \cdots + p^x(1-p)^{n-x}}^{\binom{n}{x} \text{ vezes}} \\ &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \end{aligned}$$

onde $x = 0, 1, \ldots, n$.

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$ e f.p. dada por

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \ x = 0, 1, \ldots, n.$$

Dizemos que X tem distribuição binomial com n repetições e probabilidade de sucesso p. Notação: $X \sim B(n, p)$.

Se $X \sim B(n, p)$, então sua esperança e sua variância são dadas, respectivamente, por

$$\mu = E(X) = np$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = np(1-p).$$

Exemplo

Um estudante faz um teste de múltipla escolha com 25 questões, cada uma com 4 alternativas, apenas chutando as respostas. Qual a probabilidade de o estudante acertar mais do que 20 questões? Quantas questões ele acerta em média e com qual variância?
Estamos interessados em $X =$ "número de questões certas das 25 do teste". Temos que $X \sim B(25, \frac{1}{4})$. Logo,

$$P(X > 20) = \sum_{x=21}^{25} P(X = x) = \sum_{x=21}^{25} \binom{25}{x} (0.25)^x (0.75)^{25-x} = 9 \cdot 10^{-10},$$

$$E(X) = np = 25 \cdot 0.25 = 6.25$$

e

$$Var(X) = np(1-p) = 25 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 4.6875.$$

Modelo geométrico e binomial negativo

Considere o experimento E que consiste em repetições independentes de um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso $P(\{s\}) = p$ até a ocorrência do primeiro sucesso. Defina $X =$ "número de réplicas realizadas". Qual o conjunto imagem de X?

Modelo geométrico e binomial negativo

Considere o experimento E que consiste em repetições independentes de um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso $P(\{s\}) = p$ até a ocorrência do primeiro sucesso. Defina X = "número de réplicas realizadas". Qual o conjunto imagem de X? $Im(X) = \{1, 2, \ldots\}$.

Exercício: Mostre que a f.p. de X é dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \ x = 1, 2, \ldots.$$

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{1, 2, \ldots\}$ e f.p. dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \ x = 1, 2, \ldots.$$

Dizemos que X tem distribuição geométrica com probabilidade de sucesso p. Notação: $X \sim Geo(p)$.

Se $X \sim Geo(p)$, então

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} \text{ e } \sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercício: Defina $Y =$ "número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso". Verifique que $P_Y(y) = (1-p)^y p$ e encontre $E(Y)$ e $Var(Y)$. Dica: $Y = X - 1$, logo

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(X - 1 = y) = P(X = y + 1) = P_X(y + 1).$$

A v.a. geométrica pode ser generalizada. Considere o experimento E que consiste em repetições independentes de um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso $P(\{s\}) = p$ até a ocorrência do k-ésimo sucesso. Defina X = "Número de réplicas realizadas". Qual o conjunto imagem de X?

A v.a. geométrica pode ser generalizada. Considere o experimento E que consiste em repetições independentes de um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso $P(\{s\}) = p$ até a ocorrência do k-ésimo sucesso. Defina X = "Número de réplicas realizadas". Qual o conjunto imagem de X? $Im(X) = \{k, k+1, \ldots\}$.

É possível mostrar que

$$P_X(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, x = k, k+1, \ldots.$$

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{k, k+1, \ldots\}$ e f.p. dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, x = k, k+1, \ldots.$$

Dizemos que X tem distribuição binomial negativa com k sucessos e probabilidade de sucesso p. Notação: $X \sim BN(k, p)$.

Se $X \sim BN(k,p)$, então

$$\mu = E(X) = \frac{k}{p} \text{ e } \sigma^2 = Var(X) = k\frac{(1-p)}{p^2}.$$

Comentário

Observações:

- *é possível mostrar que uma v.a. binomial negativa com k sucessos e probabilidade de sucesso p é a soma de k v.a. geométricas independentes com probabilidade de sucesso p;*
- *a diferença entre uma v.a. binomial e uma binomial negativa é que, na primeira o número de réplicas é constante e o número de sucessos é aleatório, enquanto na segunda o número de réplicas é aleatório e o número de sucessos é constante;*
- *se $X \sim BN(k,p)$, com $k = 1$, então $X \sim Geo(p)$.*

Exemplo

Um sistema de tolerâncias de defeitos, que processa transações para uma financeira usa três computadores e age da seguinte forma: se o computador em operação falha, um dos dois de reserva o substituem; caso este venha a falhar, ele é substituido pelo último. Considere que uma falha durante qualquer transação ocorre com probabilidade 10^{-2}. Qual o número médio de transações até que todos os computadores falhem?

Exemplo

Um sistema de tolerâncias de defeitos, que processa transações para uma financeira usa três computadores e age da seguinte forma: se o computador em operação falha, um dos dois de reserva o substituem; caso este venha a falhar, ele é substituido pelo último. Considere que uma falha durante qualquer transação ocorre com probabilidade 10^{-2}. Qual o número médio de transações até que todos os computadores falhem?

Defina $X =$ "número de transações até que os três computadores falhem". Temos que $X \sim BN(3, 10^{-2})$. Logo,

$$E(X) = \frac{3}{10^{-2}} = 3 \cdot 10^2 = 300.$$

Exemplo

Um sistema de tolerâncias de defeitos, que processa transações para uma financeira usa três computadores e age da seguinte forma: se o computador em operação falha, um dos dois de reserva o substituem; caso este venha a falhar, ele é substituido pelo último. Considere que uma falha durante qualquer transação ocorre com probabilidade 10^{-2}. Qual o número médio de transações até que todos os computadores falhem? Defina $X =$ "número de transações até que os três computadores falhem". Temos que $X \sim BN(3, 10^{-2})$. Logo,

$$E(X) = \frac{3}{10^{-2}} = 3 \cdot 10^2 = 300.$$

Exercício: Qual o número médio de transações sem falha?

Considere um lote de N peças com K defeituosas. Suponha que n peças serão sorteadas **sem** reposição desse lote e serão inspecionadas. Seja $X =$ "número de peças defeituosas encontradas nas n sorteadas".

Comentário

Vale ressaltar alguns comentários:

1. *podemos enxergar o processo de inspeção de cada peça como uma realização de um experimento de Bernoulli, onde ela será classificada como defeituosa (sucesso) ou não defeituosa (fracasso);*

Modelo Hipergeométrico

Considere um lote de N peças com K defeituosas. Suponha que n peças serão sorteadas **sem** reposição desse lote e serão inspecionadas. Seja $X =$ "número de peças defeituosas encontradas nas n sorteadas".

Comentário

Vale ressaltar alguns comentários:

1. *podemos enxergar o processo de inspeção de cada peça como uma realização de um experimento de Bernoulli, onde ela será classificada como defeituosa (sucesso) ou não defeituosa (fracasso);*
2. *porém, as repetições de cada experimento não são mais independentes;*

Modelo Hipergeométrico

Considere um lote de N peças com K defeituosas. Suponha que n peças serão sorteadas **sem** reposição desse lote e serão inspecionadas. Seja $X =$ "número de peças defeituosas encontradas nas n sorteadas".

Comentário

Vale ressaltar alguns comentários:

1. *podemos enxergar o processo de inspeção de cada peça como uma realização de um experimento de Bernoulli, onde ela será classificada como defeituosa (sucesso) ou não defeituosa (fracasso);*
2. *porém, as repetições de cada experimento não são mais independentes;*
3. *portanto, embora parecida com a v.a. binomial, pelo fato das repetições dos experimentos de Bernoulli não serem independentes, X tem outra função de probabilidade.*

Qual o conjunto imagem de X?

Qual o conjunto imagem de X?

$$Im(X) = \{\max(0, n - (N - K)), \ldots, \min(K, n)\}.$$

Afinal:

- $K \geq n \Rightarrow X \leq n$

Qual o conjunto imagem de X?

$$Im(X) = \{\max(0, n - (N - K)), \ldots, \min(K, n)\}.$$

Afinal:

- $K \geq n \Rightarrow X \leq n$ e $K < n \Rightarrow X \leq K$

Qual o conjunto imagem de X?

$$Im(X) = \{\max(0, n - (N - K)), \dots, \min(K, n)\}.$$

Afinal:

- $K \geq n \Rightarrow X \leq n$ e $K < n \Rightarrow X \leq K$, logo

$$X \leq \min(K, n);$$

- $N - k \geq n \Rightarrow X \geq 0$

Qual o conjunto imagem de X?

$$Im(X) = \{\max(0, n - (N - K)), \ldots, \min(K, n)\}.$$

Afinal:

- $K \geq n \Rightarrow X \leq n$ e $K < n \Rightarrow X \leq K$, logo
$$X \leq \min(K, n);$$
- $N - k \geq n \Rightarrow X \geq 0$ e $N - k < n \Rightarrow X \geq n - (N - k)$,

Qual o conjunto imagem de X?

$$Im(X) = \{\max(0, n - (N - K)), \ldots, \min(K, n)\}.$$

Afinal:

- $K \geq n \Rightarrow X \leq n$ e $K < n \Rightarrow X \leq K$, logo
$$X \leq \min(K, n);$$
- $N - k \geq n \Rightarrow X \geq 0$ e $N - k < n \Rightarrow X \geq n - (N - k)$, logo
$$\max(0, n - (N - K)).$$

É possível mostrar que

$$P_X(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ x \in Im(X).$$

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{\max(0, n-(N-K)), \ldots, \min(K, n)\}$ e f.p. dada por

$$P_X(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \; x \in Im(X).$$

Dizemos que X tem distribuição hipergeométrica com N elementos, K do tipo 1 e n sorteados. Notação: $X \sim HG(N, K, n)$.

É possível mostrar que, se $X \sim HG(N, K, n)$, então

$$\mu = E(X) = np \quad \text{e} \quad \sigma^2 = Var(X) = np(1-p)\overbrace{\frac{(N-n)}{(N-1)}}^{(*)},$$

onde $p = K/N$. O termo $(*)$ é conhecido como fator de correção.

Exemplo

Em uma loteria, sorteiam-se 6 números de 40 sem reposição. Um jogador escolhe seis números. Qual a probabilidade de que o jogador acerte os seis números? Qual a probabilidade de quecinco dos seis números escolhidos pelo jogador sejam sorteados?

Exemplo

Em uma loteria, sorteiam-se 6 números de 40 sem reposição. Um jogador escolhe seis números. Qual a probabilidade de que o jogador acerte os seis números? Qual a probabilidade de quecinco dos seis números escolhidos pelo jogador sejam sorteados?

Temos $N = 40$ números no total, $n = 6$ são escolhidos pelo jogador e $K = 6$ são os que de fato são sorteados (tipo 1). Queremos encontrar, primeiramente, a probabilidade de que o jogador acerte os seis números

$$\begin{aligned} P_X(6) = P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{34}{6-6}}{\binom{40}{6}} = \frac{34!6!}{40!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35} \\ = \frac{1}{10 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{3232320} = 3.1 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

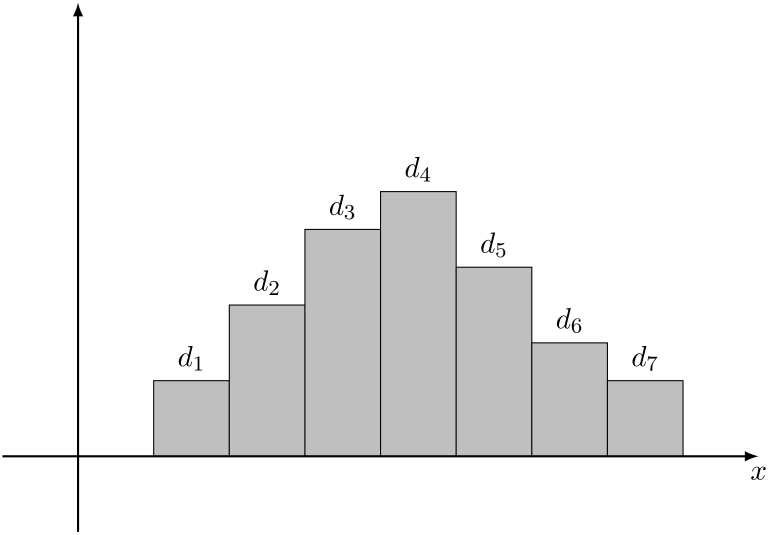
Exercício: Responder a segunda questão.

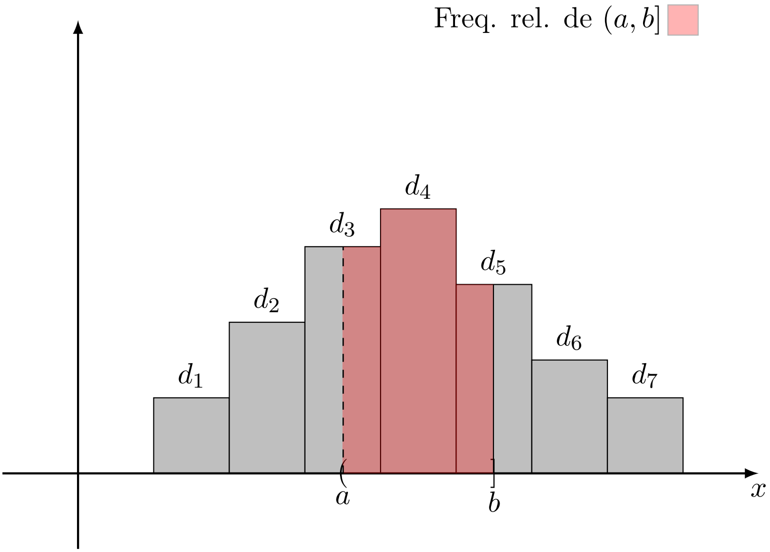
Estrutura

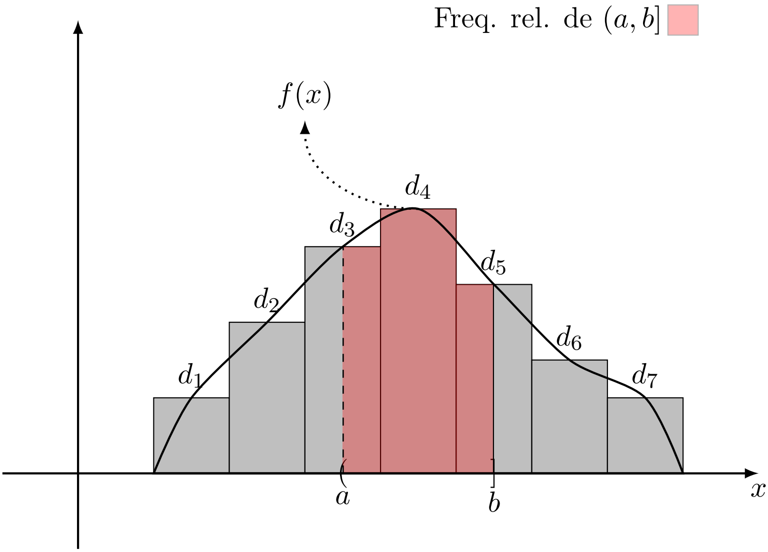
Variáveis aleatórias contínuas

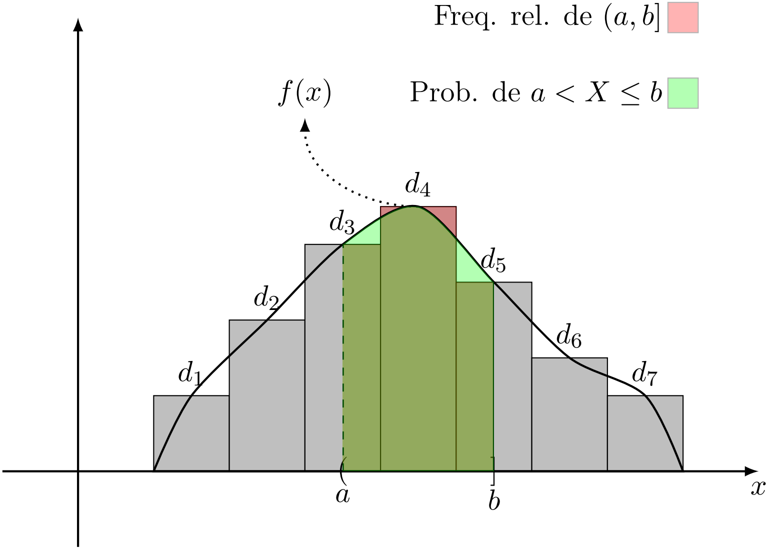
Suponha que X é uma v.a. contínua. Devido a natureza não contável de $Im(X)$ neste caso, não devemos estabelecer probabilidades "ponto-a-ponto" conforme no caso discreto.

Caso discreto	Caso contínuo
↓	↓
Um modelo para as frequências relativas em cada ponto de $Im(X)$	Um modelo para as densidades


d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
d_6
d_7
x


Freq. rel. de $(a, b]$
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
d_6
d_7
a
b
x


Freq. rel. de $(a, b]$
$f(x)$
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
d_6
d_7
a
b
x



Freq. rel. de $(a,b]$
Prob. de $a < X \leq b$
$f(x)$
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
d_6
d_7
a
b
x

Definição

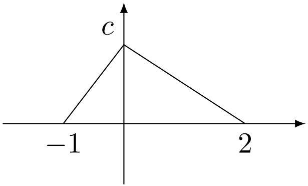
Seja $f(x)$ uma função, tal que:

- $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
- *a área entre* $f(x)$ *e o eixo horizontal é igual a* 1.

Dizemos que $f(x)$ *é função densidade de probabilidade (f.d.p.) de alguma v.a. contínua.*

Exemplo: Seja

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1), & -1 < x < 0; \\ c(1 - x/2), & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Para qual valor de c, $f(x)$ é densidade?

Definição

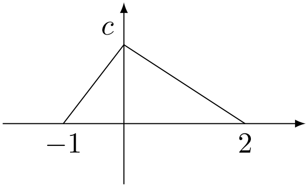
Seja $f(x)$ uma função, tal que:

- $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
- *a área entre* $f(x)$ *e o eixo horizontal é igual a* 1.

Dizemos que $f(x)$ é função densidade de probabilidade (f.d.p.) de alguma v.a. contínua.

Exemplo: Seja

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1), & -1 < x < 0; \\ c(1 - x/2), & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Para qual valor de c, $f(x)$ é densidade? Primeiramente, $c > 0$.

Definição

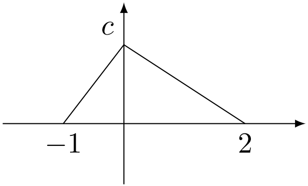
Seja $f(x)$ uma função, tal que:

- $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
- *a área entre* $f(x)$ *e o eixo horizontal é igual a* 1.

Dizemos que $f(x)$ é função densidade de probabilidade (f.d.p.) de alguma v.a. contínua.

Exemplo: Seja

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1), & -1 < x < 0; \\ c(1 - x/2), & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Para qual valor de c, $f(x)$ é densidade? Primeiramente, $c > 0$. A área abaixo de $f(x)$ por sua vez é $\frac{c}{2} + c = \frac{3c}{2}$.

Função densidade de probabilidade

Definição

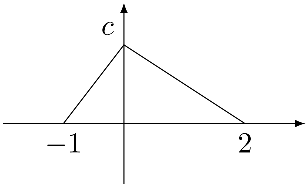
Seja $f(x)$ uma função, tal que:

- $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
- *a área entre* $f(x)$ *e o eixo horizontal é igual a* 1.

Dizemos que $f(x)$ é função densidade de probabilidade (f.d.p.) de alguma v.a. contínua.

Exemplo: Seja

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1), & -1 < x < 0; \\ c(1 - x/2), & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Para qual valor de c, $f(x)$ é densidade? Primeiramente, $c > 0$. A área abaixo de $f(x)$ por sua vez é $\frac{c}{2} + c = \frac{3c}{2}$. Logo, devemos ter $c = \frac{2}{3}$.

Definição formal

Como obter as probabilidades

Dada uma v.a. contínua X com função densidade de probabilidade $f(x)$. A probabilidade $P(a < X \leq b)$ é dada pela área entre a f.d.p. $f(x)$ e o eixo horizontal comprendida no intervalo $(a, b]$.
Por este motivo

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

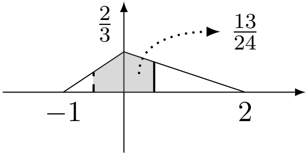
e, além disso,

$$P(X = x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Definição formal

Exercício: Mostre que, se X tem a f.d.p. do exemplo anterior, então

$$P(-0.5 < X < 0.5) = \frac{13}{24}.$$



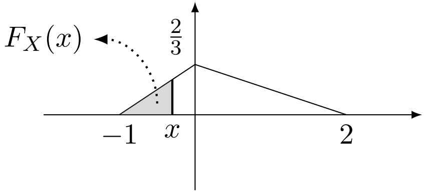
Definição

Seja X v.a. contínua com f.d.p. $f(x)$. Definimos a função de distribuição cumulativa de X por $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Exemplo: Retornando ao exemplo anterior, temos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{(x+1)^2}{3},$$

se $-1 < x < 0$.

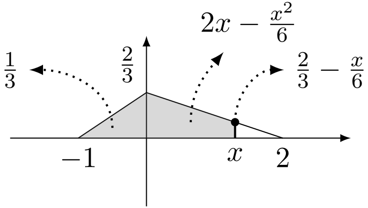


Definição

Seja X v.a. contínua com f.d.p. $f(x)$. Definimos a função de distribuição cumulativa de X por $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Exemplo: Retornando ao exemplo anterior, temos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{6},$$

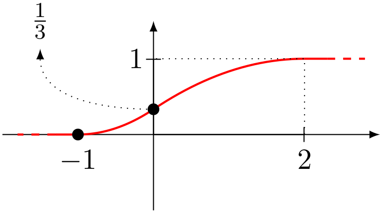


se $0 \leq x < 2$.
Assim, a função de distribuição cumulativa (f.d.c.) é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ (x+1)^2/3, & -1 < x < 0; \\ \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{6}, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Definição formal

Gráfico de $F_X(x)$:



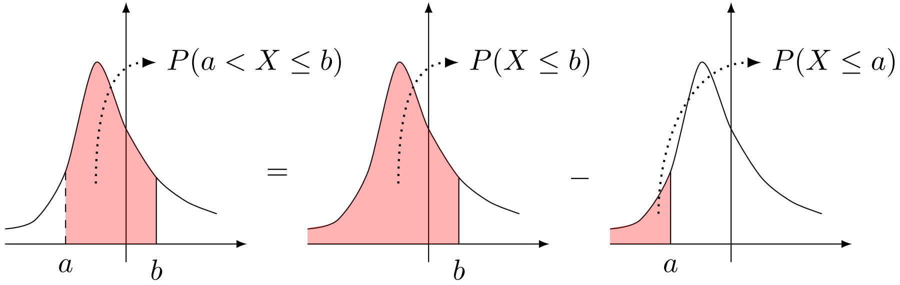
No caso contínuo, a função de distribuição cumulativa satisfaz as mesmas propriedades que no caso discreto. A saber:

- $F_X(x) \to 0$, quando $x \to -\infty$;
- $F_X(x) \to 1$, quando $x \to \infty$;
- $x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$;
- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Além disso, a f.d.c. de uma v.a. contínua é uma função contínua.
A esperança e a variância são definidas no caso contínuo através do uso de integrais.

Definição formal

A última propriedade enunciada anteriormente pode ser vista através da seguinte figura:



Logo,

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Estrutura

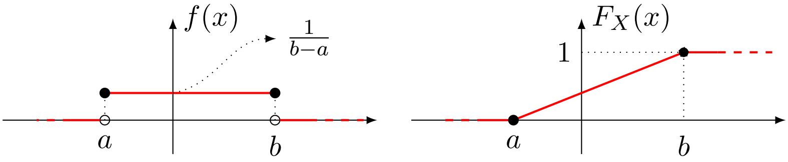
Modelo uniforme contínuo

Definição

Seja X v.a. contínua com conjunto imagem $Im(X) = [a, b]$ e com f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & c.\ c. \end{cases}$$

Então, dizemos que X tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$. Notação: $X \sim U[a, b]$.



Exercício: Mostre que $F_X(x) = 0$, $x < a$, $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $x \in [a, b]$, e $F_X(x) = 1$, $x > b$.

Esperança e variância

Suponha que $X \sim U[a, b]$. É possível mostrar que a esperança e a variância de X são dadas, respectivamente, por

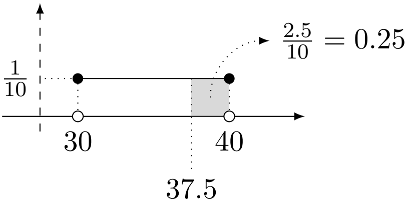
$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemplo: Suponha que o tempo em segundos requerido para completar uma operação de montagem seja $X \sim U[30, 40]$. Determinemos:

1. a proporção de operações que duram mais do que 37.5 segundos;
2. o tempo que é excedido por 90% das montagens;
3. a média e a variância da duração das montagens.

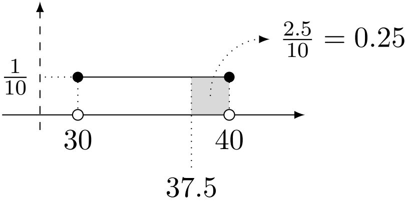
Em (1), temos que

$$P(X > 37.5) = \frac{40 - 37.5}{40 - 30} = 0.25.$$



Em (1), temos que

$$P(X > 37.5) = \frac{40 - 37.5}{40 - 30} = 0.25.$$



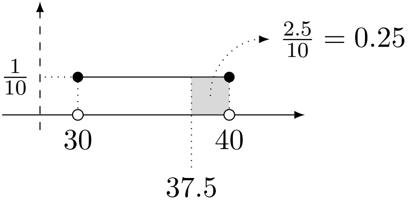
Em (2) queremos encontrar x, tal que $P(X > x) = 0.9$. Note que

$$0.9 = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - \frac{x - 30}{40 - 30}$$
$$\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = 0.1 \Rightarrow x - 30 = 1 \Rightarrow x = 31.$$

Portanto, 90% das operações de montagem duram mais do que 31 segundos.

Em (1), temos que

$$P(X > 37.5) = \frac{40 - 37.5}{40 - 30} = 0.25.$$



Em (2) queremos encontrar x, tal que $P(X > x) = 0.9$. Note que

$$0.9 = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - \frac{x - 30}{40 - 30}$$
$$\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = 0.1 \Rightarrow x - 30 = 1 \Rightarrow x = 31.$$

Portanto, 90% das operações de montagem duram mais do que 31 segundos.

Em (3), basta utilizarmos as fórmulas de esperança e variância para esse modelo. Logo, temos que $\mu = E(X) = \frac{30+40}{2} = 35$ e $\sigma^2 = Var(X) = \frac{(40-30)^2}{12} = \frac{100}{12} = 8.33$.

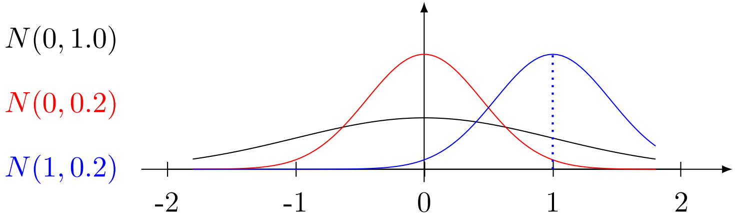
Modelo normal (ou gaussiano)

Definição

Dizemos que X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se sua f.d.p. é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Principal importância: grande aplicabilidade devido ao Teorema Central do Limite (TCL).

$$\begin{tikzcd} \boxed{X_1, \ldots, X_n} \arrow[d, dotted, "n \text{ grande}", "E(X_i) = \mu \quad Var(X_i) = \sigma^2"'] \\ \boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)} \end{tikzcd}$$

- Se fosse possível observar R amostras de tamanho n;
- Estas gerariam R médias amostrais;
- Se n for muito grande o histograma das R médias amostrais teria o formato aproximado de uma normal;
- Os parâmetros seriam a média teórica, μ, e variância teórica dividida pelo tamanho amostral, $\frac{\sigma^2}{n}$.

O TCL também nos fornece base teórica para afirmar que, em algumas situações, somas de **muitas** v.a.'s têm distribuição aproximadamente normal.

Exemplo: O desvio do comprimento de uma peça usinada do valor em sua especificação pode ser pensado como soma de um grande número de efeitos:

- pulsos na temperatura e na umidade;
- vibrações;
- variações no ângulo de corte;
- desgaste da ferramenta de corte;
- desgaste do mancal;
- variações na velocidade rotacional;
- variações de montagem e fixação;
- variações nas inúmeras características das matérias-primas.

Se os efeitos forem independentes, então se pode mostrar que o desvio total tem distribuição aproximadamente normal.

Padronização

É possível mostrar que, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a esperança e a variância de X são, respectivamente,

$$E(X) = \mu \text{ e } Var(X) = \sigma^2.$$

Definição

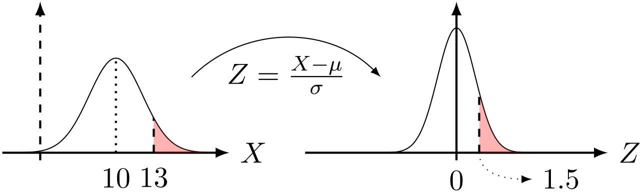
Seja $Z \sim N(0,1)$. Então dizemos que Z tem distribuição normal padrão.

Teorema

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tem distribuição normal padrão.

Exemplo: Seja X a corrente em um pedaço de fio medida em miliampéres. Suponha que $X \sim N(10, 4)$. Qual a probabilidade de realizarmos uma medida nesse fio que supere 13 miliampéres? Queremos encontrar $P(X > 13)$.

Observe que $P(X > 13) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{13-10}{2}\right) = P(Z > 1.5)$.

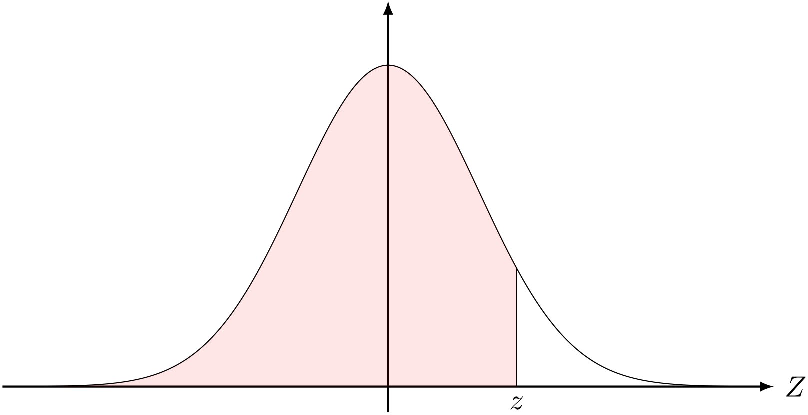


Assim:

- basta conhecer as probabilidades para uma v.a. normal padrão Z;
- utilizando a padronização $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, obtemos as probabilidades para normais com quaisquer parâmetros μ e σ^2.

De fato, existe uma tabela com as probabilidades da normal padrão.

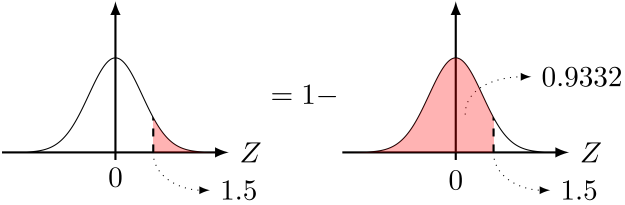
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998


Z
z

Dessa forma, a probabilidade da corrente ultrapassar 13 miliampéres é

$$P(X > 13) = P(Z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

Afinal:



Aproximação da binomial pela normal

Exemplo: Considere que uma linha de fabricação produz peças defeituosas com probabilidade de 0.05. Seja $Y =$ "número de peças defeituosas num total de 5000 observadas". Percebemos que $Y \sim B(n, p)$, onde $n = 5000$ e $p = 0.05$. Se fosse perguntado a probabilidade dessa amostra conter menos do que 230 peças defeituosas, como calcular essa probabilidade?

Exemplo: Considere que uma linha de fabricação produz peças defeituosas com probabilidade de 0.05. Seja $Y =$ "número de peças defeituosas num total de 5000 observadas". Percebemos que $Y \sim B(n, p)$, onde $n = 5000$ e $p = 0.05$. Se fosse perguntado a probabilidade dessa amostra conter menos do que 230 peças defeituosas, como calcular essa probabilidade?

A rigor, deveriamos calcular

$$P(Y < 230) = \sum_{x=0}^{229} \binom{5000}{x} 0.05^x (0.95)^{5000-x}.$$

Aproximação da binomial pela normal

Exemplo: Considere que uma linha de fabricação produz peças defeituosas com probabilidade de 0.05. Seja Y = "número de peças defeituosas num total de 5000 observadas". Percebemos que $Y \sim B(n, p)$, onde $n = 5000$ e $p = 0.05$. Se fosse perguntado a probabilidade dessa amostra conter menos do que 230 peças defeituosas, como calcular essa probabilidade?
A rigor, deveriamos calcular

$$P(Y < 230) = \sum_{x=0}^{229} \binom{5000}{x} 0.05^x (0.95)^{5000-x}.$$

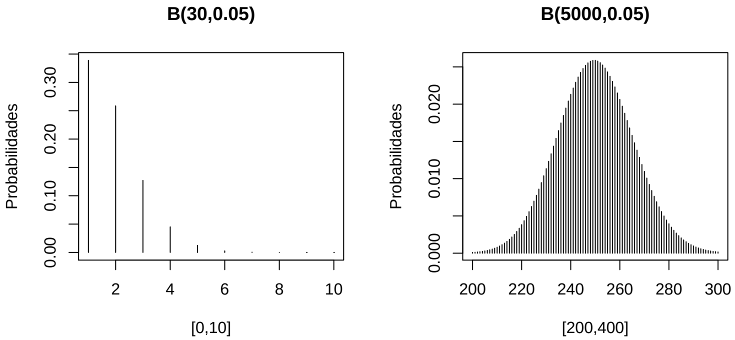
Essa tarefa pode ser facilitada percebendo que, para n suficientemente grande. O gráfico da função de probabilidades de uma v.a. $B(n, p)$ se assemelha muito com a f.d.p. de uma v.a. $N(\mu, \sigma^2)$!

Aproximação da binomial pela normal

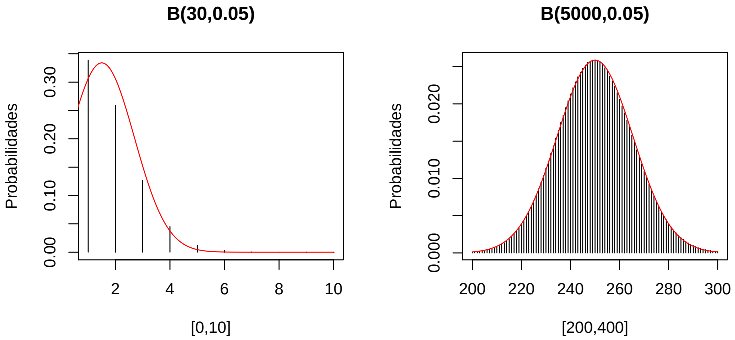
Exemplo: Considere que uma linha de fabricação produz peças defeituosas com probabilidade de 0.05. Seja $Y =$ "número de peças defeituosas num total de 5000 observadas". Percebemos que $Y \sim B(n, p)$, onde $n = 5000$ e $p = 0.05$. Se fosse perguntado a probabilidade dessa amostra conter menos do que 230 peças defeituosas, como calcular essa probabilidade?
A rigor, deveriamos calcular

$$P(Y < 230) = \sum_{x=0}^{229} \binom{5000}{x} 0.05^x (0.95)^{5000-x}.$$

Essa tarefa pode ser facilitada percebendo que, para n suficientemente grande. O gráfico da função de probabilidades de uma v.a. $B(n, p)$ se assemelha muito com a f.d.p. de uma v.a. $N(\mu, \sigma^2)$!
Mas quais valores utilizar para μ e σ^2?



B(30,0.05)
Probabilidades
0.00
0.10
0.20
0.30
2
4
6
8
10
[0,10]
B(5000,0.05)
Probabilidades
0.000
0.010
0.020
200
220
240
260
280
300
[200,400]


B(30,0.05)
Probabilidades
0.00
0.10
0.20
0.30
2
4
6
8
10
[0,10]
B(5000,0.05)
Probabilidades
0.000
0.010
0.020
200
220
240
260
280
300
[200,400]

$$N(np, np(1-p)).$$

Portanto, a probabilidade do exemplo anterior pode ser aproximada da seguinte maneira:

$$P(Y < 230) \approx P(X < 230),$$

onde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com

$$\mu = np = 5000 \cdot 0.05 = 250 \text{ e } \sigma^2 = np(1-p) = 5000 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 237.5.$$

Logo,

$$P(Y < 230) \approx P(X < 230) = P(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{230 - 250}{\sqrt{237.5}}) = P(Z < -1.29),$$

onde Z é a v.a. normal padrão. Olhando a tabela temos que

$$P(Y < 230) \approx 0.0985$$

Portanto, a probabilidade do exemplo anterior pode ser aproximada da seguinte maneira:

$$P(Y < 230) \approx P(X < 230),$$

onde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com

$\mu = np = 5000 \cdot 0.05 = 250$ e $\sigma^2 = np(1-p) = 5000 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 237.5.$

Logo,

$$P(Y < 230) \approx P(X < 230) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{230-250}{\sqrt{237.5}}) = P(Z < -1.29),$$

onde Z é a v.a. normal padrão. Olhando a tabela temos que

$$P(Y < 230) \approx 0.0985$$

O valor verdadeiro é 0.0904.

Modelo exponencial

Uma distribuição muito utilizada para representar o "tempo" (ou a distância) até a ocorrência de determinado evento geralmente é modelada pela variável aleatória exponencial.

Definição

Seja X v.a. contínua com conjunto imagem $Im(X) = [0, \infty)$. Suponha que a f.d.p de X seja

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & c.c., \end{cases}$$

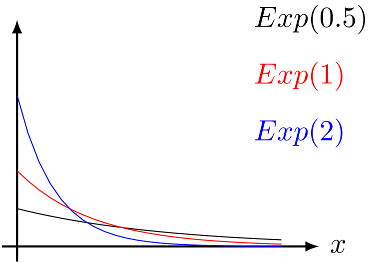
onde $\lambda > 0$. Dizemos que X tem distribuição exponencial com parâmetro λ. Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

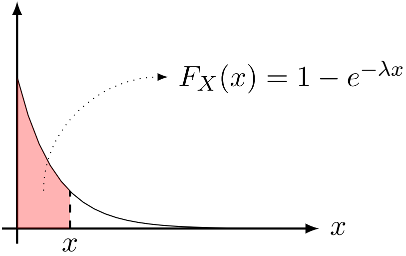
É possível mostrar que se $X \sim Exp(\lambda)$. Então,

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ e } \sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Além disso, é possível mostrar que a função de probabilidade cumulativa de X é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$


$Exp(0.5)$
$Exp(1)$
$Exp(2)$
x


$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
x
x

Exemplo

Seja X = "tempo em anos decorrido até a falha de determinado equipamento mecânico". Suponha que $X \sim Exp(\lambda)$ e que em **média** o equipamento demora 2 anos até falhar. Qual a probabilidade de esse equipamento não falhe antes de 3 anos?

Exemplo

Seja X = "tempo em anos decorrido até a falha de determinado equipamento mecânico". Suponha que $X \sim Exp(\lambda)$ e que em **média** o equipamento demora 2 anos até falhar. Qual a probabilidade de esse equipamento não falhe antes de 3 anos?
Temos que encontrar primeiramente o valor de λ. Como $\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$. Então $\lambda = 0.5$. Agora, temos que

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) \\ &= 1 - (1 - e^{-0.5 \cdot 3}) = e^{-1.5} \approx 0.22. \end{aligned}$$

Modelo de Poisson - Uma outra v.a. discreta

Suponha que, para qualquer instante $t > 0$, denotamos a quantidade de ocorrências de um determinado evento até t por X_t. Se:

- o tempo entre ocorrências do evento tem distribuição **exponencial** com parâmetro λ; e
- as ocorrências acontecem independentemente.

Então, dizemos que X_t, $t > 0$, é um processo de Poisson com taxa de ocorrências λ. Isto porque o número de ocorrências em qualquer intervalo de comprimento t tem distribuição **Poisson** com parâmetro λt.

Definição

Suponha X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{0, 1, \ldots\}$. Admita que a f.p. de X seja

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots,$$

onde $\lambda > 0$. Dizemos que X tem v.a. Poisson com parâmetro λ. Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

É possível mostrar que se $X \sim Poisson(\lambda)$, então $\mu = E(X) = \lambda$ e $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$.

Comentário

Comentários:

- *em um processo de Poisson com taxa de ocorrências* λ*, o número de ocorrências em qualquer intervalo de comprimento* 1 *tem distribuição de Poisson com parâmetro* λ*;*
- *a distribuição de Poisson é muito utilizada para modelar o número de ocorrências de eventos, não somente no tempo, mas também por unidades de medida, de área, entre outros.*

Exemplo

Em determinada cidade o número de casos de dengue tem distribuição de Poisson com 100 ocorrências por km^2 em média.

Exemplo

Em determinada cidade o número de casos de dengue tem distribuição de Poisson com 100 ocorrências por km^2 em média. Qual a probabilidade de se observar menos que 3 ocorrências em uma região de $10000m^2$?

Exemplo

Em determinada cidade o número de casos de dengue tem distribuição de Poisson com 100 ocorrências por km^2 em média. Qual a probabilidade de se observar menos que 3 ocorrências em uma região de $10000m^2$? Primeiramente, temos que $10000m^2 = 100m \cdot 100m = 0.1km \cdot 0.1km = 0.01km^2$. Logo, o número de ocorrências $X \sim Poisson(\lambda t)$, com $\lambda = 100$ e $t = 0.01$. Assim,

$$
\begin{aligned}
P(X < 3) &= \sum_{x=0}^{2} P_X(x) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-(\lambda t)}(\lambda t)^x}{x!} = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-1}(1)^x}{x!} \\
&= e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1^2}{2}\right) = e^{-0.1}(1 + 1 + 0.5) \\
&= 2.5e^{-1} \approx 0.92.
\end{aligned}
$$

FIM!

Estrutura

Definição formal

Definição

Seja $f(x)$ uma função, tal que:

- $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Dizemos que $f(x)$ é função densidade de probabilidade (f.d.p.) de alguma v.a. contínua.

Retornar

Definição formal

Dada uma v.a. contínua X com função densidade de probabilidade $f(x)$. A probabilidade

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Por este motivo

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

e, além disso,

$$P(X = x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Retornar

Esperança e variância

Definição

Seja X v.a. contínua com f.d.p. $f(x)$. Definimos a esperança e a variância de X por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2.$$

Exercício: Encontre a esperança e a variância da v.a. contínua com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1), & -1 < x < 0; \\ \frac{2}{3}(1 - x/2), & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Retornar

Alternativamente, a função de distribuição cumulativa de uma v.a. contínua X com f.d.p. $f(x)$ pode ser definida como segue:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Uma das propriedades da f.d.c. $F_X(x)$ é que é possível recuperar a f.d.p. da v.a. X através de

$$f(x) = \frac{d}{dx}F_X(x).$$

Dessa forma, no exemplo anterior, temos que

$$f(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1), & -1 < x < 0; \\ \frac{2}{3}(1-\frac{x}{2}), & 0 \leq x < 2; \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Retornar